



Ответы и решения задач «жёлтого» уровня сложности MathCat.ONLINE

Задача 1. (5 баллов) Вася ходил на матчи «Спартака» 12 раз. Первый раз он пошёл на матч 1 августа, а каждое посещение, начиная со второго, приходилось на первое число следующего по алфавиту месяца. Сколько месяцев прошло между первым и последним походом Васи на матчи «Спартака»?

Ответ: 101.

Решение: Выпишем месяцы в алфавитном порядке: *август, апрель, декабрь, июль, июнь, май, март, ноябрь, октябрь, сентябрь, февраль, январь*. В один календарный год Вася ходил на матчи только в *апреле и декабре*, а также в *марте и ноябре*. Для остальных пар соседних месяцев в приведённом списке каждое следующее посещение приходилось на следующий год. Значит, последний поход Васи пришёлся на 9-й год после первого, то есть между ними прошло 8 полных лет и 5 месяцев.

Задача 2. (7 баллов) На каждой грани куба написано натуральное число. Три из них показаны на рисунке, а про остальные три известно, что они простые. Кроме того, суммы чисел на противоположных гранях равны. Чему может быть равна сумма всех чисел на кубе? (См. рис. 1)

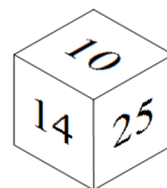


Рисунок 1

Ответ: 81.

Решение: Числа на видимых гранях куба не все одной чётности, поэтому и среди чисел на невидимых гранях есть хотя бы одно чётное. Но единственное чётное простое число – это 2, и оно может быть написано только напротив наибольшего из видимых чисел, то есть напротив 25. Значит, сумма чисел на противоположных гранях равна 27, а сумма всех чисел на кубе – $27 \cdot 3 = 81$.

Задача 3. (7 баллов) В стране 100 жителей, некоторые из которых всегда говорят правду, а остальные всегда врут. Каждому нравится ровно один жанр фильмов: детектив, мелодрама, боевик, комедия или ужасы. Все жители ответили на пять вопросов:

- 1) Нравятся ли вам детективы?
- 2) Нравятся ли вам мелодрамы?
- 3) Нравятся ли вам боевики?
- 4) Нравятся ли вам комедии?
- 5) Нравятся ли вам ужасы?

На первый вопрос утвердительно ответили 27 человек, на второй – 30, на третий – 42, на четвёртый – 34, а на пятый – 21. Сколько лжецов может быть в стране?

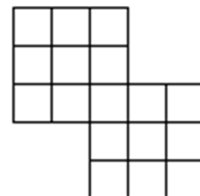
Ответ: 18.

Решение: Обозначим количество лжецов через x . Каждый из них четыре раза ответил утвердительно (про все жанры, кроме того, который ему действительно нравится). Каждый из остальных $100 - x$ жителей ответил утвердительно один раз, поэтому всего положительных ответов было $4x + 100 - x = 3x + 100$. По условию это число равно $27 + 30 + 42 + 34 + 21 = 154$, то есть $3x + 100 = 154$, откуда $x = 18$.

Задача 4. (8 баллов) Два куба, состоящие из 27 кубиков каждый, расположены так, что имеют ровно три общих кубика. Из скольких квадратов может состоять поверхность такой фигуры?

Ответ: 94.

Решение: Несложно понять, что два куба могут иметь три общих кубика, только если эти кубики образуют параллелепипед $1 \times 1 \times 3$, имеющий общее ребро с каждым кубом. Пусть этот параллелепипед вертикальный, тогда фигура имеет четыре боковые грани 3×3 , четыре боковые грани 2×3 , а верхняя и нижняя грани имеют вид, показанный на рисунке. Значит, площадь поверхности такой фигуры равна $9 \cdot 4 + 6 \cdot 4 + 17 \cdot 2 = 94$.



Задача 5. (10 баллов) На доске написано натуральное число. Оказалось, что между некоторыми его цифрами можно поставить знаки умножения (хотя бы один) так, что значение полученного выражения будет равно 2022. Какое наименьшее число может быть написано на доске?

Ответ: 3376.

Решение: Если одним из сомножителей является само число 2022, то нужна ещё хотя бы одна единица, и тогда число на доске не менее чем пятизначно.

Если же используются только собственные делители числа 2022, то это могут быть 2, 3, 337 или какие-то их попарные произведения. Если использованы все три перечисленных делителя, то число на доске снова пятизначно. Если объединить в пару 2 и 337, то получим числа 3 и 674, а наименьшее число, составленное из них, это 3674. Произведение чисел 3 и 337 равно 1011, поэтому если объединить их в пару, то число на доске опять будет пятизначным. Остался один вариант – объединить в пару 2 и 3. Тогда получаем числа 6 и 337, а наименьшее число, которое можно составить из них, равно 3376. При этом $3376 < 3674$, поэтому именно оно и является наименьшим возможным.

Задача 6. (10 баллов) На гипотенузе AB прямоугольного треугольника ABC отметили точку D , а на катете BC – точку E . Чему может быть равен угол EDC , если $\angle B = 40^\circ$, $\angle BCD = 10^\circ$ и $\angle BAE = 5^\circ$? Ответ дайте в градусах.

Ответ: 85° .

Решение: Из условия следует, что $\angle A = 90^\circ - \angle B = 50^\circ$. Угол ADC является внешним к треугольнику BDC , поэтому $\angle ADC = \angle B + \angle BCD = 50^\circ$. Значит, треугольник ACD равнобедренный, то есть $AC = DC$. Заметим, что $\angle CAE = \angle A - \angle BAE = 45^\circ$. Следовательно, треугольник ACE прямоугольный равнобедренный, откуда $AC = EC$.

Таким образом, $DC = EC$, поэтому треугольник DCE равнобедренный и $\angle EDC = (180^\circ - \angle ECD):2 = 85^\circ$.

Задача 7. (11 баллов) В футбольном матче встретились две команды по 11 игроков в каждой. Средний возраст игроков одной из команд был на 1 год больше среднего возраста игроков другой. После того как в каждой команде было удалено по одному футболисту, средний возраст игроков одной из команд также оказался на 1 год больше среднего возраста игроков другой. На сколько один из удалённых игроков мог быть старше другого?

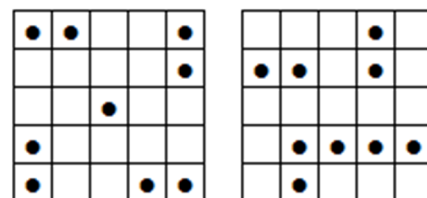
Ответ: 1 или 21.

Решение: Из условия следует, что сначала сумма возрастов игроков первой команды была на 11 лет больше суммы возрастов игроков второй. После удаления футболистов сумма возрастов игроков первой команды стала на 10 лет либо больше, либо меньше суммы возрастов игроков второй. В первом случае удалённый игрок первой команды старше удалённого игрока второй на $11 - 10 = 1$ год, а во втором случае – на $11 + 10 = 21$ год.

Задача 8. (13 баллов) В каждой клетке доски 5×5 стоит по фишке. Каждую фишку переставили на соседнюю по стороне клетку. Какое наибольшее количество клеток могло оказаться пустыми после этого?

Ответ: 16.

Решение: Девять фишек, отмеченных на рисунке слева, займут разные клетки, поэтому пустыми могут оказаться не более $25 - 9 = 16$ клеток. С другой стороны, все фишки можно собрать на девяти клетках, отмеченных на рисунке справа.



Задача 9. (14 баллов) Петя вычислил произведение цифр у каждого трёхзначного числа. Затем он выписал трёхзначные числа в следующем порядке: сначала в порядке возрастания числа с произведением цифр 0, затем в порядке возрастания числа с произведением цифр 1 и так далее. На каком месте оказалось число 888?

Ответ: 890.

Решение: Запишем полученную последовательность в обратном порядке. На первом месте, очевидно, будет число 999. Далее идут три числа с цифрами из набора (8, 9, 9): 998, 989, 899. Так как $8 \cdot 8 > 7 \cdot 9$, то

следующими тремя числами будут числа с цифрами из набора (8, 8, 9): 988, 898, 889, а следующими тремя – числа с цифрами из набора (7, 9, 9): 997, 979, 799. А вот следующим будет число 888. Таким образом, в новой последовательности оно окажется на 11-м месте, а так как всего трёхзначных чисел 900, то в исходной последовательности число 888 стоит на 890-м месте.

Задача 10. (15 баллов) Фигура на рисунке состоит из квадратных клеток со стороной 1. Найдите наибольшую длину замкнутой ломаной без самопересечений, звенья которой совпадают со сторонами клеток. (См. рис. 2)

Ответ: 32.

Решение: Покрасим узлы решётки в шахматном порядке, как показано на рисунке. Так как концы всех сторон клеток имеют разные цвета, то в любой замкнутой ломаной, построенной на решётке, цвета вершин при обходе чередуются. Всего есть 16 белых узлов, поэтому замкнутая ломаная не может иметь длину более 32. На том же рисунке показано, что ломаная такой длины существует.

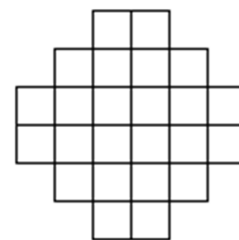


Рисунок 2

